- الدالة الأسية -

الثانية سلك بكالوريا علوم رياضيات

I- الدالة الأسية النبيرية

1- تعاريف و خاصيات أولية

نعلم أن دالة $\ln$ تقابل من $]0;+\infty[$ نحو $\mathbb{R}$ و بالتالي تقبل دالة عكسية من $\mathbb{R}$ نحو $]0;+\infty[$

أ- تعريف

الدالة العكسية لدالة اللوغاريتم النبيري تسمى الدالة الأسية النبيرية نرمز لها (مؤقتا) بالرمز $\exp$

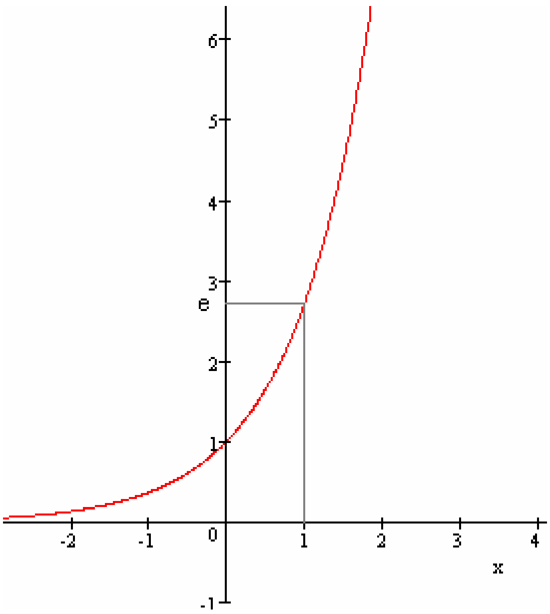
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \forall y \in]0;+\infty[\qquad \exp(x) = y \iff \ln y = x$$

ب- خاصيات أولية

* $\exp(0) = 1 \qquad \exp(1) = e$
* $\exp(x) \succ 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
* $\ln(\exp(x)) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
* $\exp(\ln(x)) = x \qquad \forall x \in]0;+\infty[$
* الدالة $\exp$ تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$
* $\exp(a) = \exp(b) \Leftrightarrow a = b \qquad \forall (a;b) \in \mathbb{R}^2$
* $\exp(a) \succ \exp(b) \Leftrightarrow a \succ b \qquad \forall (a;b) \in \mathbb{R}^2$

2- التمثيل المبياني لدالة exp

في معلم متعامد ممنظم منحنى الدالة $\ln$ و منحنى الدالة $\exp$ متماثلان بالنسبة للمنصف الأول



3- خاصية أساسية

$$\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2 \qquad \exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$$

البرهان

$$\ln(\exp(a) \times \exp(b)) = \ln \exp(a) + \ln \exp(b) = a + b$$
$$\ln \exp(a+b) = a + b$$
$$\ln(\exp(a) \times \exp(b)) = \ln \exp(a+b)$$
$$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$$

نـــــتائج

$$\forall (a;b)\in\mathbb{R}^2 \qquad \forall r\in\mathbb{Q} \qquad \exp(-a)=\frac{1}{\exp(a)}$$

$$\exp(a-b)=\frac{\exp(a)}{\exp(b)} \qquad \exp(ra)=\left[\exp(a)\right]^r$$

4- كتابة جديدة لدالة exp

نعلم أن $\exp(1)=e$ و بالتالي $\forall r\in\mathbb{Q} \quad \exp(r)=\left[\exp(1)\right]^r=e^r$

نمدد هده الكتابة إلى $\mathbb{R}$ أي $\forall x\in\mathbb{R} \quad \exp(x)=e^x$

الخاصيات السابقة تصبح

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad \forall y\in\left]0;+\infty\right[\qquad e^x=y \Leftrightarrow x=\ln y$$

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad \ln e^x=x \qquad \forall x\in\left]0;+\infty\right[\quad e^{\ln x}=x$$

$$\forall (a;b)\in\mathbb{R}^2 \quad \forall r\in\mathbb{Q} \quad e^{a+b}=e^a.e^b \qquad e^{-a}=\frac{1}{e^a} \qquad e^{a-b}=\frac{e^a}{e^b} \qquad e^{rb}=\left(e^a\right)^r$$

$$\forall (a;b)\in\mathbb{R}^2 \quad e^a=e^b \Leftrightarrow a=b$$

$$\forall (a;b)\in\mathbb{R}^2 \quad e^a=e^b \Leftrightarrow a\succ b$$

تمرين

1- حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين $e^{x-2}=2 \quad ; \quad e^{2x}-3e^x+2=0$

2- حل في $\mathbb{R}$ المتراجحتين $e^{x^2-x}\succ 1 \quad ; \quad e^{3x+1}-3e^{2x+1}+e^{x+1}\prec 0$

1/ نحل $\mathbb{R}$ المعادلة $e^{x-2}=2$

$e^{x-2}=2 \Leftrightarrow x-2=\ln 2 \Leftrightarrow x=2+\ln 2$ اذن $S=\{2+\ln 2\}$

نحل $\mathbb{R}$ المعادلة $e^{2x}-3e^x+2=0$

نضع $e^x=t$ المعادلة تصبح $t^2-3t+2=0 \quad t\in\mathbb{R}^{+*}$

لدينا $\Delta=1$ ومنه $t=2$ أو $t=1$

و بالتالي $e^x=2$ أو $e^x=1$

و منه $x=\ln 2$ أو $x=0$

$S=\{0;\ln 2\}$

2/ نحل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $e^{x^2-x}\succ 1$

$$e^{x^2-x}\succ 1 \Leftrightarrow x^2-x\succ 0$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^2-x		+	0	-	0	+	

اذن $S=\left]-\infty;0\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

نحل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $e^{3x+1}-3e^{2x+1}+e^{x+1}\prec 0$

$$e^{3x+1}-3e^{2x+1}+e^{x+1}\prec 0 \Leftrightarrow e^{x+1}\left(e^{2x}-3e^x+1\right)\prec 0$$

$$\Leftrightarrow e^{2x}-3e^x+1\prec 0$$

نضع $e^x=t$

المتراجحة تصبح $t^2-3t+2\prec 0 \quad t\in\mathbb{R}^{+*}$

t	0		1		2		$+\infty$
t^2-3t+2		+	0	-	0	+	

و منه $t^2-3t+2 \prec 0 \Leftrightarrow 1 \prec t \prec 2$ $\quad t \in \mathbb{R}^{+*}$

و بالتالي $1 \prec e^x \prec 2$ ومنه $0 \prec x \prec \ln 2$

إذن $S =]0;\ln 2[$

5- مشتقة الدالة الأسية النبيرية

أ- بما أن دالة $\ln$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و مشتقتها لا تنعدم على $]0;+\infty[$ فان الدالة الأسية قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و

$$\left(e^x\right)' = \frac{1}{\ln'\left(e^x\right)} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

خاصية

الدالة $x \to e^x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\left(e^x\right)' = e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

ب- خاصية

إذا كانت u قابلة للاشتقاق على مجال I فان الدالة $x \to e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على I

$$\left[e^{u(x)}\right]' = u'(x)e^{u(x)} \qquad \forall x \in I$$

أمثلة حدد الدالة المشتقة للدالة f في الحالتين التاليتين

a) $f(x) = e^{3x^2-x}$

$$f'(x) = \left(3x^2-x\right)'e^{3x^2-x} = (6x-1)e^{3x^2-x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

b) $f(x) = e^{x-x\ln x}$

$$f'(x) = (x-x\ln x)'e^{x-x\ln x} = (1-\ln x-1)e^{x-x\ln x} = (-\ln x)e^{x-x\ln x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

6- نهايات هامة

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0 \qquad \lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

نبين $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

نضع $t = e^x$ ومنه $x = \ln t$

وحيث أن $\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0^+$ فان

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{\ln t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\frac{\ln t}{t}} = +\infty$$

تمرين حدد $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}$ $\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x}$ $\quad \lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$

الجواب

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} 4\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{x}{e^x} = 0\times0 = 0$$

نضع $t = \frac{1}{x}$ ومنه $x = \frac{1}{t}$ و بالتالي

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right) = \lim_{x\to0^+} \frac{e^t-1}{t} = 1$$

تمرين أدرس و مثل مبيانيا الدالتين f و g حيث $f(x)=\frac{e^x}{x}$ $\quad g(x)=\frac{e^x-1}{e^x}$

II- الدالة الأسية للأساس a

1- تعريف

ليكن a عددا حقيقيا موجبا قطعا و مخالفا للعدد1

الدالة العكسية للدالة Log_a تسمى الدالة الأسية للأساس a و يرمز لها بالرمز $\exp_a$

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad \forall y\in\left]0;+\infty\right[\qquad \exp_a(x)=y\Leftrightarrow Log_a(y)=x$$

ملاحظة

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad \forall y\in\left]0;+\infty\right[\qquad \exp_a(x)=y\Leftrightarrow Log_a(y)=x\Leftrightarrow x=\frac{\ln y}{\ln a}\Leftrightarrow \ln y=x\ln a\Leftrightarrow y=e^{x\ln a}$$

اذن $\forall x\in\mathbb{R}\qquad \exp_a(x)=e^{x\ln a}$

(هذا يعني أن دالة $\exp_a$ هي تركيب الدالة الخطية $x\to x\ln a$ و الدالة الأسية النيبيرية)

2- خاصيات

$$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2\quad \forall r\in\mathbb{Q}\quad \exp_a(x+y)=\exp_a(x)\times\exp_a(y)\qquad \exp_a(-x)=\frac{1}{\exp_a(x)}$$

$$\exp_a(x-y)=\frac{\exp_a(x)}{\exp_a(y)}\qquad \exp_a(rx)=\left(\exp_a(x)\right)^r$$

3- كتابة أخرى للعدد $\exp_a$

$$\forall a\in\mathbb{R}^{+*}-\{1\}\quad \exp_a(1)=a\qquad (Log_a(a)=1)$$

$$\forall r\in\mathbb{R}\quad \forall a\in\mathbb{R}^{+*}-\{1\}\qquad \exp_a(r)=\left[\exp_a(1)\right]^r=a^r$$

نمدد هذه الكتابة الى $\mathbb{R}$ فنكتب $\exp_a(x)=a^x\qquad \forall x\in\mathbb{R}$

$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad \forall y\in\left]0;+\infty\right[\qquad a^x=y\Leftrightarrow x=Log_a(y)$$

$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad \forall a\in\mathbb{R}^{+*}-\{1\}\qquad a^x=e^{x\ln a}$$

دراسة الدالة $x\to a^x$

ليكن $a\in\mathbb{R}^{+*}-\{1\}$

* الدالة $x\to a^x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\left(a^x\right)'=a^x\ln a\qquad \forall x\in\mathbb{R}$

الحالة1 اذا كان $a\succ1$ فان $\ln a\succ0$ ومنه الدالة $x\to a^x$ تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0$

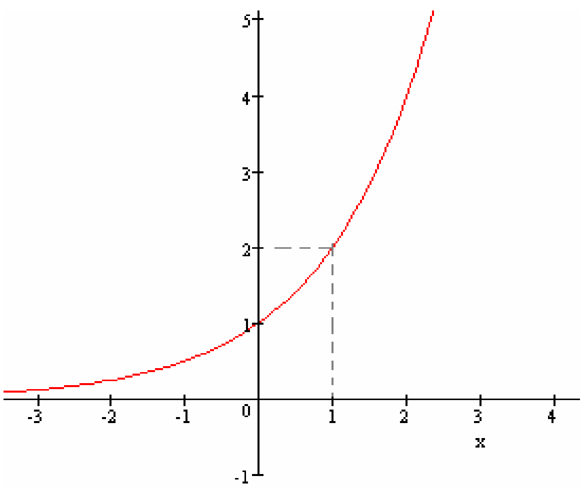
الحالة2 اذا كان $0\prec a\prec1$ فان $\ln a\prec0$

ومنه الدالة $x\to a^x$ تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$

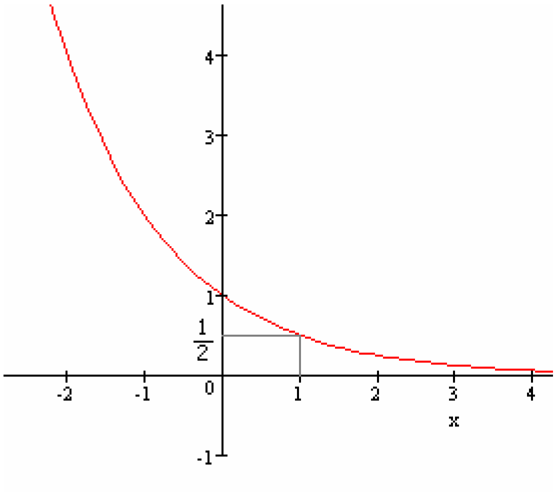
و $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=0$ $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty}a^x=+\infty$

التمثيل المبياني

$a\succ1\qquad (a=2)$



$0 \prec a \prec 1$ $\left(a = \frac{1}{2}\right)$



ملاحظة نلاحظ $1^x = 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ و بالتالي نكتب $a^x = e^{x \ln a}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}$
